ARTYKUŁY

„Via Mentis" 1 (1/2012)

Bartosz Janik[1], Michał Kamiński[2]

Prolegomena do analizy Bayesowskiej w kognitywistyce

Niniejszy tekst ma za zadanie wprowadzić w zagadnienie możliwości wykorzystania analizy Bayesowskiej w naukach kognitywnych. Wobec coraz częstszego i szerszego wykorzystania analizy Bayesowskiej w naukach empirycznych, społecznych oraz prawnych powinno podjąć się próbę wykorzystania zalet tej analizy na gruncie nauk kognitywnych. W niniejszym artykule przedstawione zostaną elementarne wiadomości o analizie Bayesowskiej oraz pokazane zostaną aspekty, w których analiza ta może zostać wykorzystana w ramach nauk kognitywnych.

1. Wnioskowanie Bayesowskie

Analizą Bayesowską możemy nazwać szczególny sposób wnioskowania statystycznego, w którym wychodząc od subiektywnego rozkładu prawdopodobieństwa, poprzez kolejne stosowanie danych mechanizmów formalnych, modyfikujemy pierwotny rozkład poprzez zmianę wartości wejściowych oraz dodawanie nowych wartości do zbioru prawdopodobieństw.

1.1. Wzór Bayesa

We wprowadzeniu do artykułu przyjęto strukturę odpowiadającą początkowym rozdziałom pracy Phila Gregory'ego[3]. Centralnym elementem teorii prawdopodobieństwa jako rozszerzonego rachunku logicznego jest koncepcja prawdopodobień-

---

[1] bartosz.janik@uj.edu.pl

[2] michal.piotr.kaminski@gmail.com

[3] P. Gregory, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica Support*, Cambridge: University Press 2005.

stwa warunkowego, na gruncie której wyrasta wzór Bayesa[4]. We wszystkich miejscach, w których mowa o hipotezach, informacjach oraz o danych zakłada się, że jest mowa o zdaniach reprezentujących te elementy teorii. Zakłada się tym samym odpowiedni język, oparty na logice pierwszego rzędu. W tym miejscu wystarczy pamiętać o klasycznych aksjomatach rachunku prawdopodobieństwa. W dalszej części uwaga zostanie zwrócona na sposób wyprowadzenia teorii prawdopodobieństwa z „czystej" logiki. Najważniejszymi zasadami, rządzącymi manipulacją prawdopodobieństwem, są reguła sumy oraz reguła iloczynu[5]:

$$p(A|B) + p(A|B) = 1$$

$$p(A,B|C) = p(A|C)p(B|A,C) = p(B|C)p(A|B,C)$$

z których bezpośrednio wynika wzór Bayesa:

$$p(H|D,I) = p(H|I)p(D|H,I) \;/\; p(D|I)$$

gdzie *H* reprezentuje hipotezy, *I* nasze uprzednie informacje, zaś *D* uzyskane dane (dane wejściowe). Naturalną interpretacją jest stwierdzenie, że prawdopodobieństwo hipotezy związanej z uzyskanymi danymi w ramach uprzednio istniejących informacji p(H|D,I) jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa uzyskania hipotezy na gruncie posiadanych informacji p(H|I) oraz prawdopodobieństwu otrzymania danych doświadczalnych w warunkach posiadania hipotez oraz uprzednich informacji p(D|H,I). Formuła p(D|I) to czynnik normalizujący, który zapewnia normowanie się sumy prawdopodobieństw hipotez do jedynki[6]. Na fakt, że powyższy wzór może być matematyczną reprezentacją procesu uczenia się, zwraca uwagę Jaynes[7]. Prawdopodobieństwo prawdziwości hipotezy zmienia się w zależności od nabywanych informacji, reprezentowanych przez kolejne zdania dołączane do posiadanej

[4] Prawdopodobieństwem warunkowym nazywamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B. Analizę Bayesowską możemy postrzegać jako rachunek, w którym zbiór, do którego należy zdarzenie B, zostaje powiększony o inne zdarzenia w jakiś sposób związane ze sobą. Klasyczny rachunek prawdopodobieństwa podaje nam prosty wzór, za pomocą którego możemy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe.

[5] Reguła sumy informuje nas, że wystąpienie dwóch sprzecznych ze sobą zdarzeń jest pewne (tj. ma wartość 1). Pionowa kreska informuje o tym, co jest dane jako warunkowe. Reguła iloczynu mówi nam, w jaki sposób obliczyć prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń, mnożąc prawdopodobieństwo pod warunkiem prawdziwości zdarzenia C przez prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B pod warunkiem prawdziwości zdarzenia A oraz C. Uważny czytelnik zauważy, że zamiennie używamy określeń 'warunkowe' oraz 'prawdziwe', w jednym i drugim wypadku rozumiemy przez to okoliczność zajścia zdarzenia (z określonym prawdopodobieństwem). Tłumaczyli będziemy to w pełnym wzorze Bayesa jako dane lub informacje, które już posiadamy (informacje pewne, uzyskane, prawdziwe).

[6] P. Gregory, op. cit., s. 5.

[7] E.T. Jaynes, *Bayesian methods: General background. An introductory tutorial, Maximum Entropy and Bayesian Methods in Applied Statistics*, Cambridge: University Press 1985, s. 1–25.

puli zdań (z określonym prawdopodobieństwem). Ilustracją takiego procesu będzie zmieniające się prawdopodobieństwo w przykładzie podanym niżej. Dodać możemy, antycypując wynik obliczeń, że wystąpienie czynnika ryzyka spowodowałoby zwiększenie uzyskanego prawdopodobieństwa istnienia stanu chorobowego.

Przestrzeń hipotez może być dyskretna lub ciągła. W zależności więc od złożoności problemu możemy reprezentować nasze dane, informacje i hipotezy określonymi wartościami dyskretnymi[8] lub posługując się funkcją gęstości prawdopodobieństwa, czyli matematyczną strukturą, która informuje nas, gdzie możemy szukać naszej wartości w zbiorze o mocy continuum[9]. Należy też wspomnieć o procedurze eliminacji parametrów ubocznych, którą nazywa się marginalizacją. Parametr występujący w ramach modelu może zostać zmarginalizowany, gdy uważamy, że jego zmiana jest infinitezymalna (nieskończenie mała), co pozwala scałkować funkcję gęstości prawdopodobieństwa w stosunku do tej zmiany[10].

1.2. Przykład zastosowania

Poniższy przykład w całości został zaczerpnięty z książki Phila Gregory'ego[11]. W oparciu o dane laboratoryjne, prawdopodobieństwo fałszywego pozytywnego testu na obecność jednostki chorobowej wynosi 2.3%, zaś prawdopodobieństwo fałszywego negatywnego testu wynosi 1.4%. Zakładamy, że naszymi danymi są badania śliny i że częstotliwość występowania choroby wynosi 1:10000. Niech:

H = 'Masz jednostkę chorobową.'

$-H$ = 'Nie masz jednostki chorobowej.'

D = 'Test pozytywny.'

I = 'Brak jakiejkolwiek przyczyny choroby.'

$p(D|H,I) = 0.986$ (1 – prawdopodobieństwo fałszywego testu negatywnego)

$p(D|-H,I) = 0.023$ (prawdopodobieństwo fałszywego testu pozytywnego)

Z uwagi na okoliczność, że przestrzeń hipotez składa się z dwóch elementów, czynnik normalizujący we wzorze Bayesa może być przedstawiony jako:

---

8 Zwykle na myśli mamy wartości liczbowe z przedziału (0,1).

9 Ceną za posługiwanie się funkcją gęstości prawdopodobieństwa jest złożoność formalna obliczeń.

10 G.L. Bretthorst, *An introduction to parameter estimation using bayesian probability theory, Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Kluwer: Academic Publishers, The Netherlands 1990, s. 3. Należy dodać, że marginalizacja występuje w modelach ciągłych i w najprostszym przypadku ogranicza się do obliczenia prostej całki, której wartość zastępuje oczekiwaną wartość parametru, który chcielibyśmy wyeliminować. Precyzyjne wyjaśnienie metody wykracza poza zakres niniejszego artykułu. Nie będzie ona również niezbędna do zrozumienia podstaw analizy Bayesowskiej jako że autorzy ograniczają rozważania do modeli dyskretnych.

11 P. Gregory, op. cit., s. 11–12.

$$p(D|I) = p(H|I)p(D|H,I) + p(-H|I)p(D|-H,I)$$

zaś wzór Bayes'a:

$$p(H|D,I) = p(H|I)p(D|H,I) / p(H|I)p(D|H,I) + p(-H|I)p(D|-H,I)$$

Warto zauważyć, że $p(H|I)$ (czynnik normalizujący) nie jest niczym innym niż częstotliwością występowania choroby w populacji, $p(-H)|I) = 1 - p(H|I)$. Z podanych informacji możemy obliczyć prawdopodobieństwo posiadania choroby:

$$p(H|D,I) = 0.0042$$

Prawdopodobieństwo posiadania choroby w ramach pozytywnego testu, ale bez żadnych dodatkowych informacji, jest niskie i intuicyjnie poprawne. Warto zwrócić uwagę na fakt, że różni się on zasadniczo od prawdopodobieństwa fałszywego wyniku pozytywnego. Wrócić można w tym miejscu do okoliczności przywoływanej wcześniej. Gdyby nagle okazało się, że do puli danych dodajemy informację, że uzyskano wartość 0.95 testu na okoliczność, która z prawdopodobieństwem 0.75 potwierdza chorobę, wynik końcowy znacznie by się podniósł. Warta odnotowania jest jeszcze jedna okoliczność. W tym przykładzie za punkt wyjścia służą dane uzyskane metodą standardowej (częstościowej) analizy statystycznej. Zwykle jednak stanowią go dane subiektywnie przyporządkowane. W drugim przypadku analiza Bayesowska przestaje być miarą obiektywności i zaczyna spełniać swoją rolę jako miara przekonań dokonującego obliczeń[12].

1.3. Estymacja parametrów

1.3.1. Prawdopodobieństwo

Najważniejszym elementem analizy Bayesowskiej jest efektywna estymacja parametrów[13]. Problemem każdej teorii rozwijanej w sposób Bayesowski jest ko-

[12] W tym miejscu warto zwrócić uwagę na problem interpretacji teorii prawdopodobieństwa – centralny dla filozoficznego aspektu analizy Bayesowskiej. Klasycznie interpretujemy prawdopodobieństwo częstościowo, tj. jako częstotliwość wystąpienia pewnego zdarzenia w nieskończonym ciągu niezależnych zdarzeń. Próbujemy wtedy twierdzić coś obiektywnego o rzeczywistości. Analiza Bayesowska odrzuca taki punkt widzenia i pokazuje nam, że prawdopodobieństwo analizowane powinno być jako miara potwierdzenia naszych własnych przekonań. Nie rozstrzyga ona o charakterze danych wejściowych, ale zwraca uwagę na okoliczność, że nic obiektywnego i pewnego o świecie nie możemy powiedzieć. Siłą analizy Bayesowskiej jest zapewnienie formalnej metody wnioskowania, która w ramach posiadanych danych pozwoli uzyskać nam poprawne wartości dla testowanych hipotez. Zainteresowanych zagadnieniem interpretacji prawdopodobieństwa odsyłam do znakomitej książki W. Załuski, *Skłonnościowa interpretacja prawdopodobieństwa*, Kraków–Tarnów 2008.

[13] G.L. Bretthorst, op. cit.

nieczność zewnętrznego przyporządkowania prawdopodobieństwa. Z pomocą w takim przypadku przychodzi zasada Maksymalnej Entropii, sformułowana przez Claude'a E. Shannona[14]. Badacz ten stworzył pierwszą, w pełni matematyczną teorię komunikacji, która położyła kamień węgielny pod współczesną informatykę jako naukę o reprezentowaniu i manipulacji informacją. Wspomniana zasada informuje nas, że w sytuacji, w której posiadamy dyskretny rozkład prawdopodobieństwa $P(H|I)$ wartością, która mówi nam o niepewności tego rozkładu jest entropia[15]:

$$H = \sum P(i|I) \log P(i|I)$$

Posiadając określoną informację (wyrażalną propozycjonalnie), możemy przypisać rozkład prawdopodobieństwa do pewnego zdania w taki sposób, że będzie ono wyrażało jedynie te informacje, które uznamy za istotne. Aby tego dokonać, należy zmaksymalizować wartość H w stosunku do ograniczeń zawartych w posiadanej przez nas informacji[16]. Dokonujemy operacji analogicznej do omawianej wcześniej marginalizacji parametrów.

1.3.2. Wybór modelu

Wybór odpowiedniego modelu statystycznego dla określonych informacji i danych, opartego na analizie Bayesowskiej, w sytuacji, gdy możliwy do zastosowania jest więcej niż jeden model, wymaga dokonania obliczeń, które na gruncie teorii Bayesowskiej w sposób bezpośredni wskażą model bardziej faworyzowany[17]. Pierwszoplanową rolę w tym procesie odgrywa czynnik Ockhama, który faworyzuje modele o większej prostocie. Wartość tego czynnika zależy od infitezymalnej zmiany parametrów w porównywanych modelach[18]. W najprostszym, dyskretnym przypadku, wybór modelu sprowadza się do obliczenia prostej formuły, porównującej moce predykcyjne obu modeli, tj. wartości prawdopodobieństwa koroboracji (niepowodzenia w falsyfikacji lub zwykłego potwierdzenia) określonych hipotez.

---

[14] C.E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, „The Bell System Technical Journal" 1948, nr 27, s. 379–423, 623–656.

[15] Entropią jest średnia ważona ilości informacji niesionej przez pojedynczą wiadomość (w naszym przypadku zdanie), gdzie wagami są prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych części zdania tej wiadomości. Wartość ta ma bardzo duże znaczenie przy doborze odpowiednich parametrów w modelu. Zagadnienie entropii przywoływane jest w tym miejscu dla zwrócenia uwagi na okoliczność, że wartość ta wykorzystywana jest na styku teorii informacji, teorii decyzji oraz informatyki, co czyni ją bardzo interesującą dla kognitywistyki.

[16] G.L. Bretthorst, op. cit., s. 4.

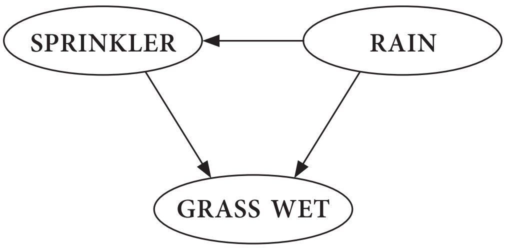
[17] P. Gregory, op. cit.

[18] Ze zmianą infitezymalną będziemy mieli do czynienia w modelach ciągłych. W modelach dyskretnych czynnik ten może zostać uproszczony do zwykłego dzielenia.

W miarę wzrostu skomplikowania modelu pojawia się problematyka wyboru określonych parametrów oraz ustalenia wartości czynnika Ockhama związanego z ich istnieniem. W tym przypadku trzeba jednak rozpatrywać funkcje gęstości prawdopodobieństwa oraz globalnego i maksymalnego prawdopodobieństwa dla danego modelu. Funkcja globalnego prawdopodobieństwa jest łącznym prawdopodobieństwem parametrów i danych uzyskanych później (czyli uzyskanych w ramach przeprowadzonych obliczeń)[19].

1.4. Sieci Bayesowskie

W prostych przypadkach wystarcza nam użycie modeli bazujących na określonych danych wejściowych, które możemy ze sobą porównywać. Jest jednak pewien warunek: stworzone modele powinny ze sobą konkurować, tj. powinny dopuszczać inne interpretacje lub otrzymanie różniących się od siebie danych wyjściowych. Automatycznie możemy zapytać, co dzieje się w sytuacji, gdy w ramach jednego modelu chcemy zbudować sieć wnioskowania o charakterze przyczynowym? Odpowiedzią na to pytanie jest wykorzystanie modelu sieci Bayesowskiej. W znaczeniu formalnym siecią Bayesowską jest skierowany graf acykliczny, którego wierzchołki reprezentują zdarzenia (hipotezy), a krawędzie pomiędzy nimi związki przyczynowo-skutkowe.



Obrazek: Prosty model sieci Bayesowskiej[20]

W powyższym przykładzie deszcz wpływa na włączanie spryskiwaczy, a one wraz z deszczem wpływają na nawilżenie trawy. W modelach, które będą nas interesowały struktura jest zwykle bardziej rozbudowana, na wejściu pojawiają się wartości prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia, a dalsze wartości na sieci liczymy, posługując się wzorem Bayesa. W ramach sieci możliwe jest reprezentowanie prawdopodobieństwa warunkowego z rozbudowanym zbiorem zdarzeń warunkowych

[19] G.L. Bretthorst, op. cit.; P. Gregory, op. cit.

[20] Źródło: http://en.wikipedia.org/wiki/File:SimpleBayesNet.svg.

(z wykorzystaniem wzoru Bayesa), związanego z modelowanymi relacjami przyczynowo-skutkowymi pomiędzy danymi oraz hipotezami (czyli tym, co na wejściu i tym, czego wartość chcemy uzyskać), oraz możliwe jest stworzenie precyzyjnej struktury wnioskowania w oparciu o model statystyczny (analogicznie do wyboru modelu w sytuacji konkurencji)[21].

2. Perspektywy

W tej części artykułu chcielibyśmy pokazać, w jaki sposób analiza Bayesowska może zostać wykorzystana do tworzenia teorii i modeli w ramach nauk kognitywnych oraz co wspólnego będą miały teorie oparte na formalizmie Bayesowskim. Nie będziemy analizowali całych modeli oraz teorii, pokażemy tylko, w jaki sposób wykorzystywane są zalety podejścia Bayesowskiego.

2.1. Modelowanie uczenia się i wnioskowania

Posługując się analizą Bayesowską, w sposób bardzo efektywny można badać systemy uczące się. Analiza ta może być zastosowana do tworzenia systemów uczących się dla potrzeb sztucznej inteligencji, gdzie nowe dane w sposób czynny modyfikują rozkład prawdopodobieństwa dla całej teorii. Z drugiej strony może to również służyć modelowaniu sposobu podejmowania decyzji przez ludzi oraz pozwala zastanawiać się nad kryteriami uznawania informacji za wiedzę oraz rekonstrukcją procesu racjonalnego podejmowania decyzji. Tworzenie modeli uczących się lub proste wnioskowanie wymaga od nas użycia struktury sieci Bayesowskiej z uwagi na dostępność dużej ilości danych wejściowych, powiązanych ze sobą różnego rodzaju związkami przyczynowymi.

Systemy dynamiczne, oparte na analizie Bayesowskiej, wykorzystywane są w prawie. Podstawowym sposobem wykorzystania sieci Bayesowskiej jest wnioskowanie na sali sądowej z zaprezentowanych dowodów. Mimo że w polskim procesie karnym zakłada się, że efektem postępowania dowodowego powinno być osiągnięcie prawdy obiektywnej, to nie jest kontrowersyjną teza, że założenie to traktować powinniśmy jako użyteczną fikcję. Nasze poznanie zmysłowe ma w dużym stopniu charakter probabilistyczny. W ramach informacji (przeprowadzonych dowodów) uzyskujemy sieć wiedzy, która opiera się na prawdopodobieństwie, które powinno być dynamicznie zmieniane w toku dołączania nowych informacji. Dobrym modelem dla tego procesu jest struktura sieci Bayesowskich, która umożliwia przedstawienie wszystkich informacji oraz ich wzajemnych relacji przyczynowych

[21] Szerzej na ten temat można przeczytać w znakomitej monografii R. Neapolitana *Learning Bayesian Networks*, Prentice Hall 2003.

w ramach relatywnie prostego modelu[22]. Systemy Bayesowskie używane są również w ramach formalizacji argumentacji prawniczych[23].

Widać w sposób jasny, które zalety sieci Bayesowskich w szczególności i analizy Bayesowskiej w ogólności stanowią zaletę takiego podejścia. Po pierwsze, formalnie system taki pozwala nam na wnioskowanie w ramach różnorodnie powiązanych ze sobą danych wyjściowych, dla których niemożliwe jest zbudowanie jednolitego modelu. Po drugie, pozwala także na dynamiczną zmianę danych wyjściowych w toku dołączania nowych danych wejściowych. Po trzecie, omijane są problemy związane z klasyczną interpretacją prawdopodobieństwa[24]. Analiza Bayesowska staje się atrakcyjna z punktu widzenia filozofii rachunku prawdopodobieństwa.

2.2. Filozofia umysłu

Analiza oparta na sieciach Bayesowskich, a więc układach probabilistycznych reprezentujących wiedzę i informacje, zastosowana może być do modelowania funkcjonowania umysłu. Próby potraktowania ludzkiego umysłu jako wielkiego układu probabilistycznego podejmowane są we współczesnej filozofii umysłu[25]. Analiza tego typu podejmowana jest również przez psychologów badających kognitywne możliwości ludzkiego mózgu przez przybliżanie ich modelami opierającymi się na wnioskowaniu statystycznym, przede wszystkim opartym na twierdzeniu Bayesa. Bardzo często przybiera to formę analizy podejmowania decyzji w ramach określonych danych posiadanych przed jej podjęciem. Analiza wygląda wtedy podobnie jak w prezentowanym wcześniej przykładzie[26].

W ramach podejścia Bayesowskiego Geoffrey Hinton i Karl Friston zaproponowali zunifikowaną teorię swobodnej energii, za pomocą której można opisać mózg, posługując się zaawansowaną analizą Bayesowską. Gdy energia swobodna, w sensie termodynamicznym, zostaje zminimalizowana (za pomocą metod znanych z rachunku wariacyjnego[27]), w odpowiedni sposób tworzona jest struktura,

[22] J. Strnad, *Should Legal Empiricists Go Bayesian?*, „Stanford Law and Economics Olin Working Paper" 2007, nr 342.

[23] N. Fenton, D. Lagnado, M. Neil, *A General Structure for Legal Arguments Using Bayesian Networks*, to appear „Cognitive Science", 2012.

[24] W. Załuski, op. cit.

[25] *The Probabilistic Mind: Prospects for Bayesian Cognitive Science*, ed. N. Chater, M. Oaksford, Oxford University Press 2008.

[26] Zob. E. Nęcka, J. Orzechowski, B. Szymura, *Psychologia poznawcza*, Warszawa 2006, s. 558–560 oraz np. M.D. Lee, E.J. Wagenmakers, *Bayesian Statistical Inference in Psychology: Comment on Trafimow*, „Psychological Review" 2003, vol. 112, nr 3, s. 662– 668.

[27] Tj. minimalizacji funkcjonału na określonej przestrzeni. W tym przypadku zagadnienie musi być aż tak skomplikowane, gdyż energię swobodną reprezentuje się za pomocą funkcji, która określa jej wartość w danym miejscu. Aby zminimalizować taką funkcję, musimy posłużyć

którą możemy nazwać Bayesowskim mózgiem. Swobodna energia – według tej teorii – ma pochodzić z różnicy energii odbieranych z zewnątrz bodźców a energią ich neuronalnych reprezentacji w mózgu. Organizm, który pozostaje ze swoim środowiskiem w równowadze, dąży do minimalizacji energii swobodnej[28]. Projekt mózgu Bayesowskiego opiera się na koncepcji, zgodnie z którą mózg posiada jakiś model rzeczywistości i w ramach tego modelu dokonywane jest minimalizowanie swobodnej energii wspomnianymi metodami[29]. W ramach tak działającego mózgu łącznie rozpatrywane mogą być mechanizmy związane z optymalizacją wykorzystania energii. Rodzaj tych mechanizmów nie zależy już od teorii mózgu Bayesowskiego, a jedynie korzysta z metod formalnych zapewnianych przez tę teorię. Możemy więc w dowolny sposób teoretyzować na temat sposobów czy powodów minimalizowania energii w ramach pewnego modelu. Hipoteza mózgu Bayesowskiego proponuje zupełnie nowe podejście do znanej nam problematyki. Należy zauważyć, że zwraca ono uwagę na możliwość modelowania pewnych struktur przy użyciu zaawansowanych metod probabilistycznych związanych z pewną interpretacją rachunku prawdopodobieństwa. Wiąże się to bezpośrednio z filozofią umysłu, ponieważ w toku takiego modelowania przemycane są treści o charakterze filozoficznym (np. status swobodnej energii, stanowisko, które presuponuje taki model w ramach problemu psychofizycznego itp.).

Idąc dalej tropem możliwości, jakie daje analiza Bayesowska, można twierdzić, iż dostarcza nam ona narzędzia do analizy ludzkiej racjonalności w znaczeniu instrumentalnym, tj. racjonalności, która daje się matematyzować i wyrazić w ramach określonego modelu nieprzewidującego zachowań akratycznych agenta[30]. Twierdzenie to opiera się zarówno na zaprezentowanych zasadach formalnych, jak i możliwościach aplikacji analizy Bayesowskiej do procesów uczenia się. Możemy zastanawiać się i pytać, w jaki sposób dwóch racjonalnych agentów może uzyskiwać różne wnioski, rozstrzygając tym samym problem, czy racjonalne postępowanie może generować różne dane wyjściowe. Wydaje się, że tak. Po pierwsze, przy założeniu posiadania identycznych systemów reprezentujących wiedzę, w sytuacji, gdy dwóch wnioskujących otrzymuje podobną informację, jedyną możliwością uzyskania przez nich odmiennych wyników jest posługiwanie się odmiennymi parametrami, a co za tym idzie – odmiennymi modelami. Po drugie, w sposób bezpośredni

---

się rachunkiem wariacyjnym, który podaje nam przepis na inną funkcję, która w każdym miejscu przybiera najmniejszą możliwą wartość.

[28] K. Friston, *The free-energy principle: a unified brain theory?*, „Nature Reviews Neuroscience" 2010, nr 11, s. 127–138.

[29] Ibidem, s. 130.

[30] Tj. takiego, który nie dokonuje świadomego wyboru gorszego działania, wiedząc, że inne bardziej się opłaca. Przykładem działania akratycznego jest prokrastynacja. Odpowiedź na pytanie o to, czy jesteśmy racjonalni, wykracza poza zakres niniejszej pracy. Odsyłamy do: W. Załuski, *Ewolucyjna Filozofia Prawa*, Warszawa 2009.

w pracach Edwina T. Jaynesa mowa jest o racjonalnym charakterze prawdopodobieństwa, które ma się zachowywać zgodnie z naszymi intuicjami dotyczącymi konfirmacji lub falsyfikacji tez systemu. Celowo zostało użyte charakterystyczne dla Carnapa sformułowanie, gdyż – naszym zdaniem – system Bayesowski stanowi uzupełnienie jego pomysłu. Analiza Bayesowska, z uwagi na swoje właściwości (obiektywność przy subiektywnym wyborze prawdopodobieństw początkowych, niezależności poprawności od wyboru modelu), z jednej strony umożliwia adekwatne wnioskowanie, z drugiej – pozwala na formalne porównywanie modeli.

3. Podsumowanie

Analiza Bayesowska na pierwszy rzut oka może wydawać się jedynie prostym narzędziem formalnym służącym do analizy hipotez na bazie posiadanych danych. Im głębiej jednak analizuje się to narzędzie, tym więcej zaobserwować można treści o charakterze pozamatematycznym. Wybór rachunku Bayesowskiego wiąże się z przyjęciem pewnego stanowiska filozoficznego oraz pewnej interpretacji prawdopodobieństwa. W związku z tym to, co reprezentowane jest przez zmienne w analizie Bayesowskiej, nabiera określonego zabarwienia filozoficznego. To pierwsze ciekawe zagadnienie, które dotyczy tego rachunku. Z drugiej strony poprzez określenie pewnego punktu widzenia, analiza Bayesowska nadaje się znakomicie do analizy pewnej klasy problemów, gdzie dostępne dane nie są zupełne, a naszym zadaniem jest podjęcie najlepszej (nie obiektywnej czy prawdziwej) decyzji. Analogicznie sytuacja się przedstawia, gdy chcemy budować najlepszy model, posługując się ograniczoną ilością danych lub gdy największe znaczenie będzie miała dynamiczna struktura zmieniających się wartości prawdopodobieństwa posiadanych informacji. Wydaje się, że analiza Bayesowska w bardzo dużym stopniu, z uwagi na scharakteryzowane cechy, może być przydatna w naukach kognitywnych.

Deliberations on the Analysis of Bayesian Cognitive Science

The paper presents the basic principles of Bayesian inference. The inference which is based on a simple logic diagram brings us to the advanced concepts associated with the choice of specific models for knowledge and parameter estimation, and the inference based on them. After presenting the above concepts in general, the author shows the opportunities for cognitive science grounded on Bayesian inference.